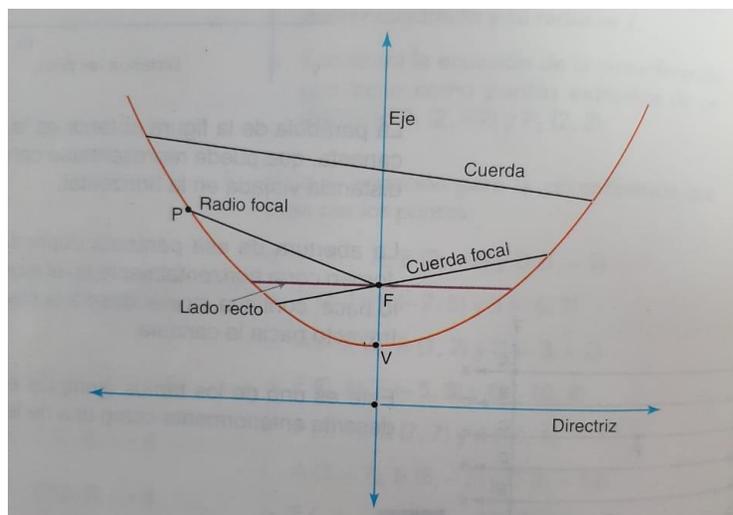




En este documento hallarás la teoría de la temática, ejemplos resueltos y la actividad a realizar en hojas de block en forma de taller. La teoría y los ejemplos deben ser transcritos al cuaderno de matemática y el taller se realizará en hojas de block, la entrega de la actividad es física, pero si es necesario calificarla antes por la situación actual del país se buscará una forma virtual de hacerlo sea por medio de fotografías o por scanner.

La parábola y su ecuación

La parábola tiene varias líneas notables o partes importantes que deben ser mencionadas y definidas.



Grafica 1: partes notables de la parábola.

La recta que pasa por F (foco) y es perpendicular a la directriz se llama **eje de la parábola**.

El punto V que está entre la directriz (\vec{d}) y el foco de la parábola (F) se llama **vértice** y es donde nace la parábola.

Cualquier segmento que une dos puntos de la parábola se llama **cuerda** y cualquier cuerda que pase por foco se llama **cuerda focal**.

La cuerda focal que es perpendicular al eje se llama **lado recto**.



Si P es un punto de la parábola, el segmento PF se llama **radio focal o radio vector**.

La **directriz** es una línea que se encuentra a igual distancia del vértice al foco pero hacia el lado contrario, esta no toca la parábola y es una línea horizontal que corta el eje y cuando la parábola abre hacia arriba o hacia abajo y su ecuación será $y = \#$ *donde corta el eje*. Si por el contrario la parábola abre hacia derecha o izquierda la directriz será una recta vertical que corta el eje x y su ecuación será $x = \#$ *donde corta el eje*

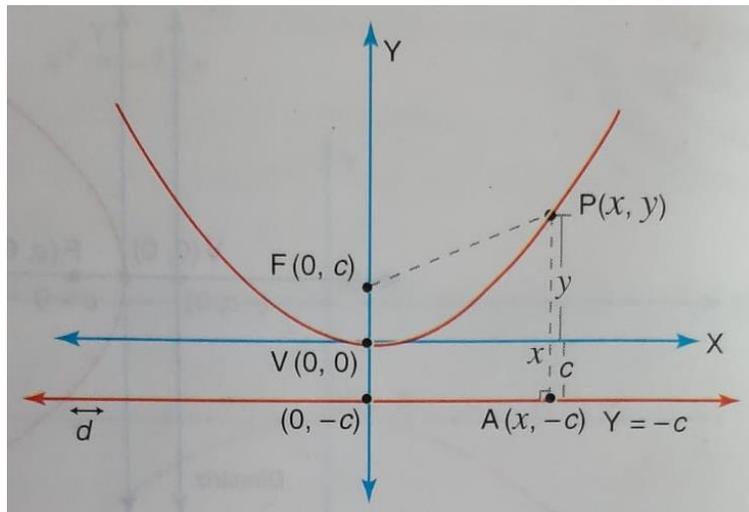
Ecuación de la parábola con vértice en el origen y como eje focal un eje coordenado.

En este espacio les voy a demostrar matemáticamente de donde sale la ecuación de una parábola pero no es lo que se debe hacer en cada ejercicio. Recuerden que luego de tener las fórmulas les enseñaré como utilizarlas.

Supongamos que el foco de la parábola se encuentra en el punto $f(0, c)$ con $c > 0$ y tiene su vértice en el origen $v(0,0)$.

Por definición, como la parábola abre hacia arriba la directriz, \vec{d} , tiene como ecuación $y = -c$ y el eje de simetría de la parábola es el mismo eje y .

Sea $P(x, y)$ un punto sobre la parábola, y se traza el punto \overline{PA} perpendicular a la directriz \vec{d} . Las coordenadas de A son $A(x, -c)$.



Grafica 2: puntos para hallar la ecuación de la parábola.

El punto P debe satisfacer que $PF = PA$.

Puede verse con facilidad que $PA = y + c$.

Por tanto: $PF = y + c$.

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos a la expresión PF, se tiene:

$$\sqrt{(y - c)^2 + (x - 0)^2} = y + c$$

Se eleva los dos lados de la ecuación al cuadrado y se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y - c)^2 + (x - 0)^2}\right)^2 = (y + c)^2$$

$$(y - c)^2 + (x - 0)^2 = (y + c)^2$$

Se desarrollan las sumas o diferencias al cuadrado:

$$(y)^2 - 2(y)(c) + (c)^2 + (x)^2 = (y)^2 + 2(y)(c) + (c)^2$$

$$y^2 - 2cy + c^2 + x^2 = y^2 + 2cy + c^2$$

Se iguala a cero al lado derecho:

$$y^2 - 2cy + c^2 + x^2 - y^2 - 2cy - c^2 = 0$$



Se reúnen términos semejantes y se despeja la variable al cuadrado:

$$x^2 = 2cy + 2cy$$

$$x^2 = 4cy$$

Esta es la ecuación de la parábola con vértice en el origen (0,0), foco en (0,c) está dada por

$$x^2 = 4cy$$

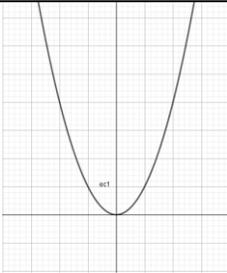
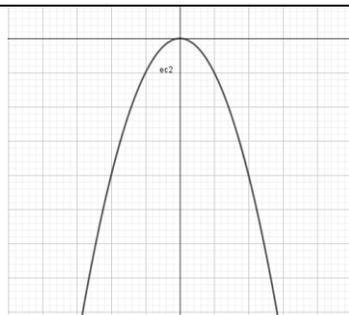
De esta ecuación se pueden deducir las otras tres:

Si la parábola abre hacia abajo basta con cambiarle el signo a negativo $x^2 = -4cy$.

Cuando el eje de simetría de la parábola es el eje x, las variables se cambian de posición, es decir si abre a la derecha la ecuación es $y^2 = 4cx$.

Y si abre a la izquierda se le cambia el signo $y^2 = -4cx$.

Donde **c** es la distancia entre el vértice y el foco, y entre el vértice y la directriz.

Ecuación	Abre	Gráfica	Ecuación de la directriz
$x^2 = 4cy$	Arriba		$y = -c$
$x^2 = -4cy$	Abajo		$y = c$



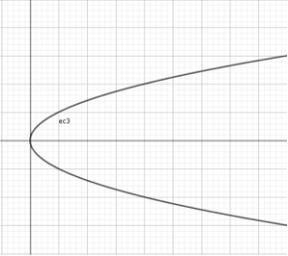
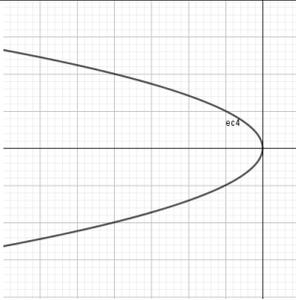
$y^2 = 4cx$	Derecha		$x = -c$
$y^2 = -4cx$	Izquierda		$x = c$

Tabla 1: ecuación de la parábola, dirección, gráfica y directriz.

Ejemplo 1:

Hallar la coordenada del vértice, el foco, la gráfica y la ecuación general de una parábola cuya ecuación estándar $x^2 = 20y$.

Se identifica que la ecuación es de una parábola que tiene vértice en el origen por la forma de su ecuación.

$$V(0,0)$$

Además, por el signo que tiene y la variable que tiene el exponente 2 es la x se identifica que abre hacia arriba.

Para hallar la distancia c (*distancia entre el vértice y el foco*) y poder ubicar el foco se hace por comparación.



$$X^2 = 20y$$
$$X^2 = 4cy$$

Gráfica 3: comparación de la ecuación dada con la de la parábola que abre hacia arriba.

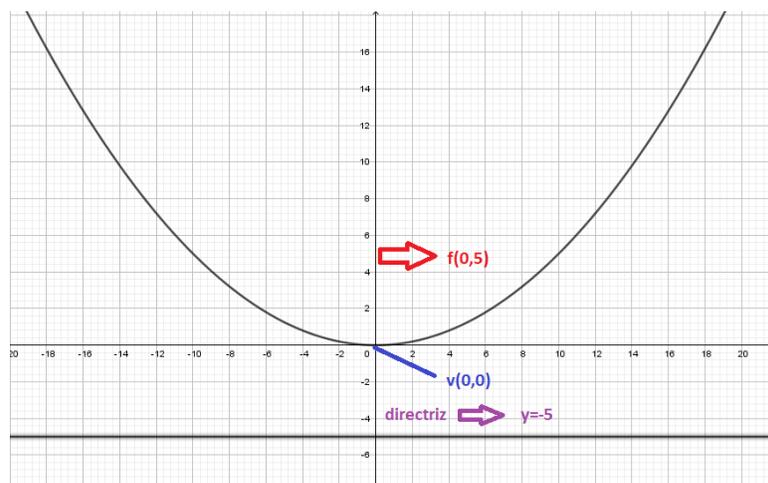
Entonces:

$$4c = 20$$

$$c = \frac{20}{4}$$

$$c = 5$$

Así que la distancia del vértice al foco es 5 unidades y se halla la coordenada en la gráfica $f(0,5)$.



Gráfica 4: grafica de la parábola con coordenada el foco



Como la directriz se traza a igual distancia del foco, pero para el lado contrario se cuentan 5 unidades y se traza una línea horizontal por ese punto y su ecuación es $y = -5$, que es el número por donde corta el eje y .

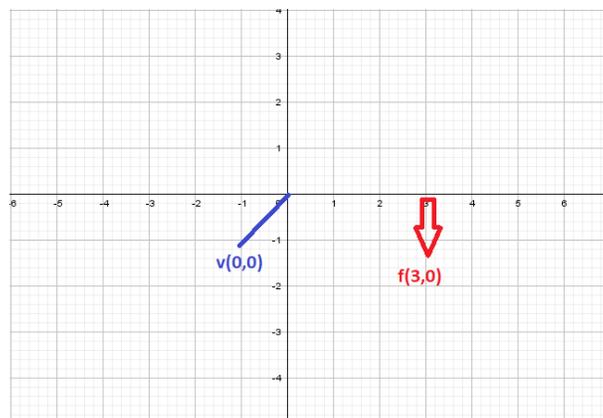
Para hallar la ecuación general tan solo basta con tomar la estándar e igualarla a cero:

$$x^2 = 20y$$

$$x^2 - 20y = 0 \text{ ecuación general.}$$

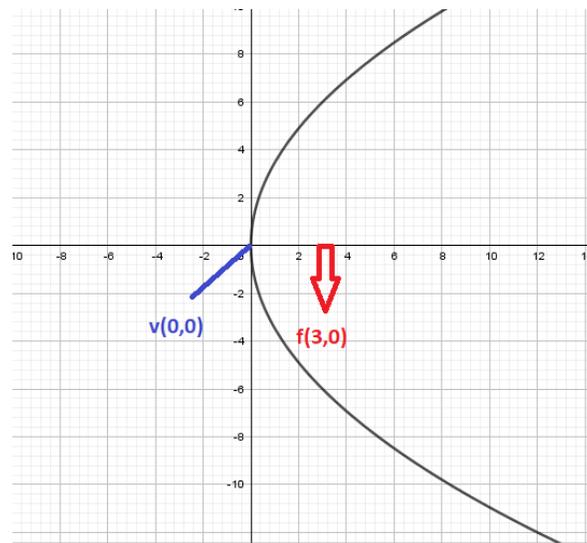
Ejemplo 2: Hallar la gráfica, la ecuación estándar y la general de una parábola con vértice en el origen y foco en el punto de coordenadas $f(3,0)$.

Lo primero que se debe hacer es ubicar en el plano cartesiano la coordenada del vértice y la del foco para identificar hacia donde abre la parábola:



Gráfica 5: ubicación del vértice y el foco en el plano cartesiano.

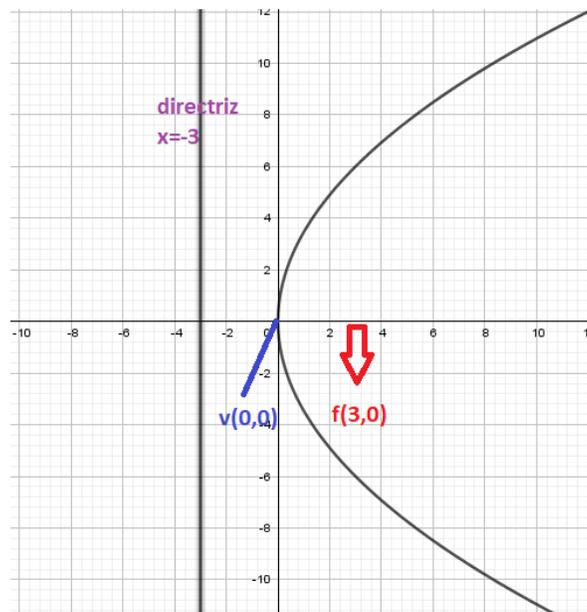
Como el foco siempre debe estar dentro de la parábola esta debe abrir hacia la derecha y se identifica (contando unidades en la gráfica) que la distancia $c = 3$.



Gráfica 6: parábola esbozada.

- Cabe anotar que en esta temática la parábola no debe ser graficada exactamente y no se debe hacer tabla de valores, solo basta con identificar su vértice, hacia donde abre y trazar una forma parabólica que la asemeje.

Y la directriz está ubicada para el lado contrario del foco (es decir a la izquierda) y ésta será una línea vertical.



Gráfica 7: gráfica de la parábola y sus partes.



La ecuación de la directriz es $x = -3$, ya que por definición es $x = \#$ donde corta el eje x .

Se coloca la ecuación que representa una parábola que abre hacia la derecha:

$$y^2 = 4cx$$

Se reemplaza el valor de c y luego se hacen las operaciones pertinentes (se multiplica 4 por c)

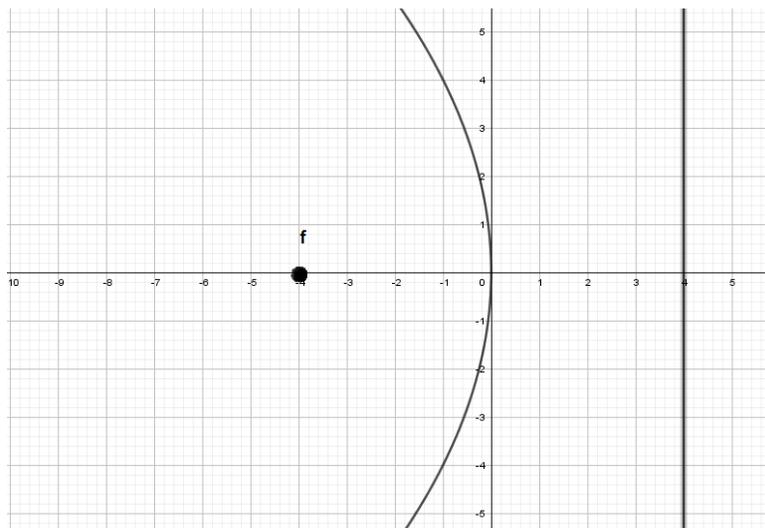
$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x \text{ ecuación estándar}$$

Para hallar la ecuación general se iguala a cero.

$$y^2 - 12x = 0 \text{ ecuación general}$$

Ejemplo 3: Hallar la ecuación estándar y la general de la parábola representada en la siguiente gráfica:



Gráfica 8: gráfica de parábola ejemplo 3.



De la gráfica anterior se identifica que abre hacia la izquierda y la distancia entre el vértice y el foco (c) es 4

$$c = 4$$

Se coloca la ecuación para una parábola que abre a la izquierda:

$$y^2 = -4cx$$

Se reemplaza el valor de c en dicha ecuación y se realiza la multiplicación:

$$y^2 = -4(4)x$$

$$y^2 = -16x \text{ ecuación estándar}$$

Se iguala a cero para hallar la general:

$$y^2 + 16x = 0 \text{ ecuación general}$$

¡¡Viste lo sencillo que fue!!



Ver video de ejemplos en el blog.



Taller de aplicación

- Esta actividad será desarrollada en hojas de block, su revisión se realizará en línea sea por fotografías o video llamada.

Encuentra las coordenadas del vértice, el foco, la ecuación de la directriz, la ecuación general y la gráfica de las siguientes parábolas.

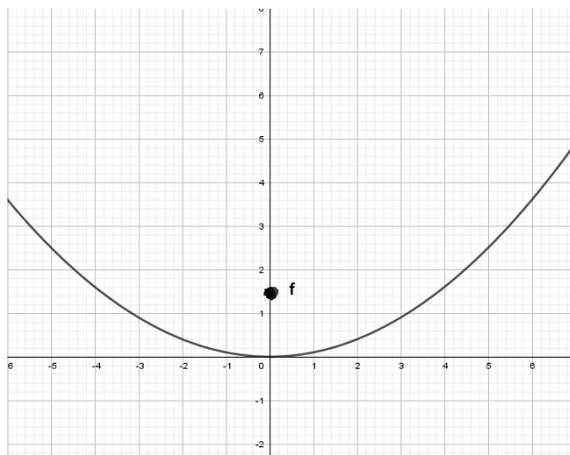
1. $y^2 = 8x$
2. $x^2 = 25y$
3. $x^2 = -12y$
4. $y^2 = -3x$

Hallar en cada ejercicio la ecuación estándar, la general y la gráfica con todas sus partes de las siguientes parábolas.

5. Foco en $(-2,0)$ y vértice en $(0,0)$
6. Foco en $(0,7)$ y vértice $(0,0)$
7. Foco en $(0,-5)$ y vértice en $(0,0)$
8. Foco en $(1,0)$ y vértice en $(0,0)$

Hallar la coordenada del vértice, coordenada del foco, ecuación de la directriz, la ecuación estándar y la general de las siguientes parábolas.

9. Gráfica





10. Gráfica

